Introduzione

Scrivo giusto due righe, poiché mi sembra opportuno spiegare il contenuto del testo seguente e come utilizzarlo al meglio.

Quello che avete davanti è l'insieme degli esercizi aggiuntivi del 2015/2016 del prof. Paolo Lisca svolti e rivisti da me. L'intento degli esercizi correlati dalla mia risoluzione sovviene d'aiuto poiché il prof. a volte utilizza un formalismo che non permette di capire a fondo l'esercizio, io essendo uno studente ho cercato invece di svolgerli in modalità user-friendly. Gli esercizi aggiuntivi se svolti di pari passo alla spiegazione della materia del professore, sono la migliore arma per superare l'esame o eventuali compitini.
In più ho inserito gli aggiuntivi del 2014/2015 per chi volesse allenarsi ancora di più.

Nel caso di non superamento delle prove in itinere, o di chi volesse affrontare direttamente l'esame completo, o addirittura di chi volesse trarre esercizi dagli esami in preparazione ai compitini, ho inserito tutti gli esami che Lisca ha proposto da quando insegna presso la facoltà di ingegneria aerospaziale.

Ho aggiunto anche tutti i test che lisca è molto solito utilizzare nelle modalità di esame, ed anche i relativi svolgimenti, seppur molto concisi essendo solamente dei test.

Infine ho inserito delle note aggiuntive personali (è lo stesso nome con cui le chiama il Prof.) poiché, essendo che nel programma esistono argomenti non presenti sui libri di testo, il professore aggiunge su e-learn dispense aggiuntive che potrebbero risultare complicate durante la comprensione. Io le ho rivisitate, ancora cercando di spiegarle in modalità user-friendly.

Di seguito trovate un indice, con il quale potrete orientarvi bene all'interno del testo.
Spero che questo testo vi sia utile e vi risparmi un po' della fatica fatta da me.

Guidolotti S.

PS: Purtroppo la rivisitazione completa del seguente testo sarebbe risultata impossibile, perciò vi prego di scusarmi se all'interno del testo troverete piccolissimi errori di conto (anche se poco possibili) e/o qualche piccolo errore grammaticale.

master copy

Indice

- **Appunti** (Numeri complessi, Applicazioni Bilineari).....1-17
- **Consigli sulla teoria in generale**.....18-29
- **Tutto sui test in aggiunta agli svolgimenti**.....30-45
- **Esercizi aggiuntivi 2015/2016** (Testo + Svolgimento personale + Soluzioni Prof.).46-158
- **Esercizi aggiuntivi 2014/2015** (Testo + Soluzioni Prof.).....159-172
- **Esercizi tratti dalle lezioni e consigli del Prof**.....173-183
- **Testi d'esame** (Testo + Svolgimento personale + Soluzioni Prof.).....184-220

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

Osservazioni: ESISTONO ALTRI TIPI DI OPERAZIONI IN GENERALE: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
(MOLTIPLICAZIONE NUMERO REALE)

ESEMPIO: $ax^2+bx+c=0$

$a,b,c \in \mathbb{R} \qquad \Delta = b^2-4ac \quad \in \mathbb{R}$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta \geq 0$

INTRODUZIONE NUMERI COMPLESSI. (1)

$x^2+1=0 \qquad x^2=-1 \qquad \nexists\ x\in\mathbb{R}$

$\mathbb{R}\cup\{i\} \qquad$ t.c. $i^2=-1$

LA SCRITTURA FORMALE

SARA'

$$\mathbb{R}\subset\{a+bi\} = \mathbb{C} \quad \text{NUMERI COMPLESSI}$$

Definizioni: $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = a_1+a_2+(b_1+b_2)i$ = SOMMA

$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

= PRODOTTO

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ È UN CAMPO.

6/10

$\mathbb{C}=\{a+ib \,/\, a,b\in\mathbb{R}\}$ NUMERI COMPLESSI $\qquad i^2=-1$ UNITÀ IMMAGINARIA

$a=Re(z)$ PARTE REALE

$b=Im(z)$ PARTE IMMAGINARIA

$\{\mathbb{C},+,\cdot\}$ $+,\cdot$ = OPERAZIONI OTTENUTE TRATTANDO L'ESPRESSIONE $a+ib$ COME UN POLINOMIO IN i.

ESEMPIO:

$z_1=1+i \qquad z_2=2-i \qquad \in\mathbb{C}$

$z_1+z_2=(1+i)+(2-i)=3$

$z_1\cdot z_2=(1+i)(2-i)=2-i+2i+i(-i)=2+i-i^2=3+i$

+: → COMMUTATIVA E ASSOCIATIVA

→ $0+i0=0$ ELEMENTO NEUTRO

→ $-(a+ib)=(-a)+i(-b)$ OPPOSTO

·: → COMMUTATIVA E ASSOCIATIVA

→ DISTRIBUTIVA RISPETTO A +

→ $1+i(0)=1$ ELEMENTO NEUTRO

ESISTENZA DEGLI INVERSI

$\forall z = a+ib \in \mathbb{C}$, IL NUMERO $\bar{z} = a-ib$ È IL CONIUGATO DI z.

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} \quad (\in \mathbb{R})$$

RICORDANDO CHE...
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — SOTTOSTRUTTURA ALGEBRICA SOTTOCAMPO
$\cup$
$z = a+i(0)$

$z \neq 0 \leftrightarrow a \neq 0$ oppure $b \neq 0$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$; $> 0 \leftrightarrow z \neq 0$

$$z \cdot \left(\frac{1}{a^2+b^2} \cdot \bar{z} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$$

$\forall z \neq 0$, ESISTE UN INVERSO

PROPRIETÀ:

$z_1 = a_1 + ib_1$
$z_2 = a_2 + ib_2$

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) =$
$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (IL CONIUGATO DELLA SOMMA È LA SOMMA DEI CONIUGATI)

2) $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\,Re(z)$

3) $z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = 2i$

4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

5) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 - b_1 a_2)$ — IL PRODOTTO DEI CONIUGATI È IL CONIUGATO DEI PRODOTTI

6) $z = a + ib \quad \bar{z} = z \quad Re(\bar{z}) = a \quad Im(\bar{z}) = -b$
$\bar{z} = z \leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

7) $\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{\bar{z}}{a^2+b^2} \right)} = \overline{\left(\frac{1}{a^2+b^2} \cdot \bar{z} \right)} = \overline{\left(\frac{1}{a^2+b^2} \right)} \cdot \overline{\bar{z}} = \frac{z}{a^2+b^2} = \left(\bar{z} \right)^{-1}$

8) $\bar{z} = a - ib \quad \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^{-1} = \frac{\bar{z}}{Re(\bar{z})^2 + Im(\bar{z})^2} = \frac{z}{a^2+b^2}$
($Re(\bar{z})^2 = a^2$, $Im(\bar{z})^2 = -b^2$)

MODULO DI $z \in \mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}$

$$|z| = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ -z, & z < 0 \end{cases} = \sqrt{z^2}$$

SE $z \in \mathbb{C}$ È REALE : $z = \bar{z}$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{z^2} = |z|_{\text{NEL SENSO REALE}}$$

PROPRIETÀ DEL MODULO

- $|z| \geq 0$ · $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|Re(z)| \leq |z|$; $|Im(z)| \leq |z| \longrightarrow |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

[Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$] [$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a^2| + |b^2|$]

$|a| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ $b^2 \geq 0$

$\sqrt{a^2}$ — DISUGUAGLIANZA OVVIA.

$a^2 + b^2 \leq |a^2| + |b^2| + 2|a||b|$ → DISUGUAGLIANZA VERA!

(a^2, b^2)

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \leftrightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
  $|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

  $(z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)$

- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ $(z \neq 0)$ · $\frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|$

$$|z^{-1}|^2 = \left(|z|^{-1}\right)^2 = |z|^{-2} = \frac{1}{|z|^2}$$

$$z^{-1} \cdot \left(\bar{z}^{-1}\right) = z^{-1} \cdot \bar{z}^{-1} = (z \cdot \bar{z})^{-1} = \left(|z^2|\right)^{-1}$$

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(a \cdot b)^{-1} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\right)^{-1} = \bar{z}_1^{-1} \cdot \bar{z}_2^{-1}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1^{-1} \cdot \bar{z}_2^{-1} = 1$$